La bellesa dels espais i les formes

Els políedres convexos són alguns dels objectes matemàtics més antics i simples però, tanmateix, un estudi aprofundit de la seva configuració ens condueix a múltiples i significatives preguntes. Què és un políedre convex? És una figura limitada per un nombre finit de superfícies planes i que és convexa, és a dir, donats dos qualssevol dels seus punts, el segment que els uneix és contingut en el políedre. Els cossos platònics: tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre i icosàedre són exemples de políedres convexos.

PETER MANI I BEAT JAGGI

Els cinc cossos platònics

En aquestes cinc figures antiquíssimes ja poden endevinar-se dos camins que parteixen dels políedres convexos: un primer camí s'endinsa cap a l'interior de les matemàtiques, l'altre s'expandeix cap enfora, cap a la pràctica, cap a la natura (figura 1). Volem convidar el lector a fer amb nosaltres algunes curtes passejades per aquests dos camins.

Al llarg del primer d'aquests camins podem contemplar el tretzè llibre dels Elements d'Euclides, on es descriuen meticulosament els cinc cossos platònics i es demostra que, fora d'ells, no hi ha al nostre espai cap altre políedre regular.

En el segon camí trobem la idea, que avui dia difícilment podem acceptar, que cada un dels cinc cossos regulars ha de correspondre's amb un dels cinc elements de l'univers: foc, terra, aigua i aire i la cinquena substància, innombrada. Si avancem prop de dos mil anys enllà, ens trobem amb J. Kepler. Segons la seva teoria, entre la matemàtica i el món exterior hi ha d'haver una harmonia perfecta. En particular, les òrbites planetàries estarien determinades de manera simple a partir dels políedres regulars. És força curiós observar com aquesta teoria va ser contradita i definitivament enterrada, després d'un esgotador treball i, segurament, amargues llàgrimes, pel seu propi creador, ben a l'inrevés de com ha passat amb tantes altres teories fantasioses.

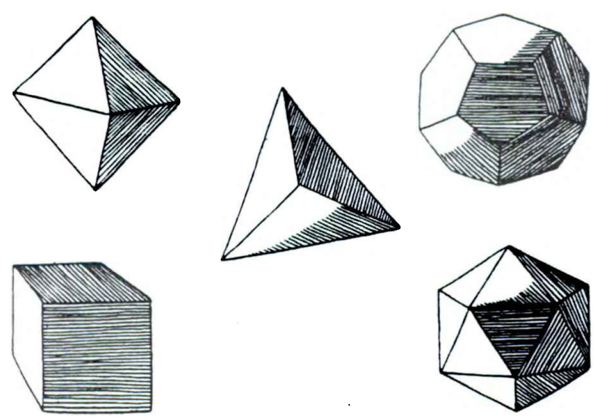


Figura 1. Els cinc cossos platònics.

La fórmula d'Euler

En el primer dels dos camins anteriors, volem ara fer esment d'un petit estudi de L. Euler, on aquest observa que sempre es compleix la relació $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ entre els nombres f_i dels elements i-dimensionals de la vora d'un políedre convex. Aquí f_0 és el nombre de vèrtex, f_1 el d'arestes i f_2 el de cares del políedre en qüestió. No ha estat fins a l'època contemporània que s'ha vist que l'equació d'Euler no és més que el primer pas d'una nova teoria dels espais i les formes que es coneix amb el nom de *topologia* i és una de les parts més belles de la recerca matemàtica. No podem pas estendre'ns aquí en aquesta teoria, però heus aquí un petit exemple: si dibuixem una xarxa qualsevol sobre la superfície d'un tor i calculem el valor de $f_0 - f_1 + f_2$ obtenim sempre zero, mentre que si fem el mateix sobre una «superfície amb dos forats» el resultat és sempre -2.

Abans de passar a parlar dels temps actuals, donem una volta pel llac de Thun, al bell mig de Suïssa, on, a mitjan segle passat, L. Schläfli va tenir prou empenta com per a reflexionar sobre els políedres en espais de més de tres dimensions. En el proper paràgraf, quan parlem de *programació lineal*, assajarem de fer veure com hom pot anar a parar, de manera natural, a la consideració d'aquests objectes.

Keplers Weltgeheimnis (Bild 2)

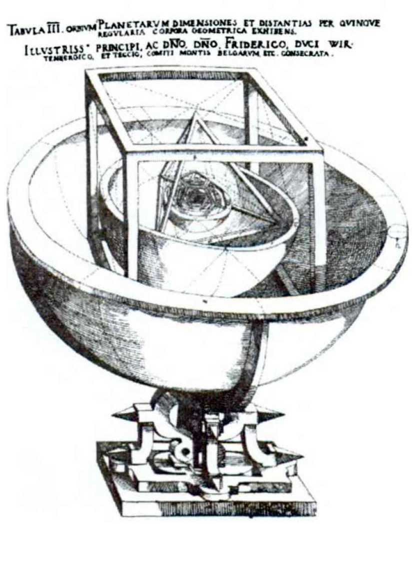


Figura 2. La visió del món de Kepler: Les sis esferes planetàries encaixades en els cinc cossos platònics. L'esfera exterior se sosté sobre el cub.

Un dels descobriments més impressionants de Schläfli va ser l'extensió de la fórmula d'Euler als políedres de dimensió d arbitrària. Ens diu que la suma alternada

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1}$$

és igual a zero si d és un nombre parell i igual a 2 si d és senar. Per $d = 2$ (polígons), això és evident, però l'autèntica bellesa d'aquesta fórmula, la descobrim quan passem a dimensions superiors.

Avui podem dir que L. Schläfli ha estat un dels més grans exploradors i descobridors i que, en silenci i sense ús de la força, ha entrat en una contrada en la qual mai ningú no havia estat abans: els espais de dimensió superior i els seus políedres convexos.

Programació lineal

Si el lector ens permet ara de donar un tomb pel camí de fora de les matemàtiques, voldríem parlar d'un problema que condueix, de manera natural, a la consideració de políedres de dimensió superior. La branca de les matemàtiques que s'ocupa dels problemes del tipus que descriurem ara s'anomena programació lineal. Considerem un problema de la vida quotidiana. Cada dia hem d'obtenir, a partir de la nostra alimentació, l'energia, la proteïna, el calci, etc., que necessitem, sense menjar més del necessari i mantenint el cost d'aquesta alimentació tan baix com sigui possible. Per tal de simplificar, suposem que ens alimentem només de llet i ous. 100 cm^3 de llet contenen 3,5 g de proteïna, 80 mg de calci i costen 30 PTA. Un ou conté 7 g de proteïna, 40 mg de calci i costa 50 PTA. Diàriament, un adult necessita uns 56 g de proteïna i uns 800 mg de calci i admetem que no podem digerir més de 2 litres de llet al dia ni més de 12 ous. Com fixaríem la nostra dieta de la manera més econòmica possible, tot i proporcionar-nos la proteïna i el calci que necessitem? Podem il·lustrar la situació amb un senzill diagrama.

Sigui x el consum diari de llet (en decilitres), sigui y el nombre d'ous consumits (figura 3). La condició de prendre prou proteïna es tradueix en la desigualtat $3{,}5x + 7y \geq 56$ i el calci ens dóna la desigualtat $80x + 40y \geq 800$. El cost de comprar x dl de llet i y ous és de $30x + 50y$ PTA.

A partir del diagrama podem veure fàcilment que a la solució òptima, $x = 8$ dl de llet i

$y = 4$ ous, s'hi arriba desplaçant la funció cost $K = 30x + 50y$ fins que toqui el domini ratllat de les solucions admissibles.

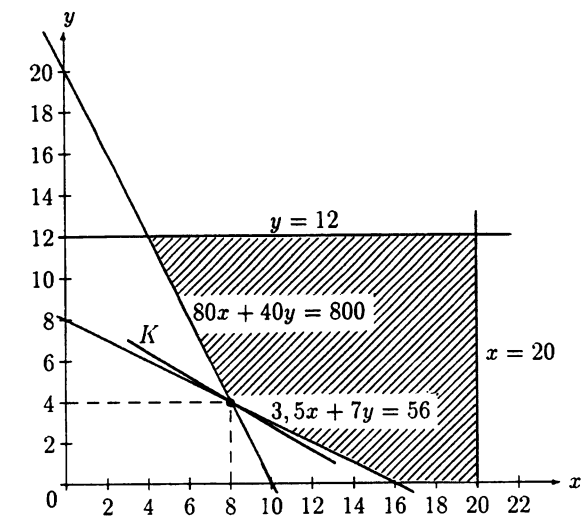


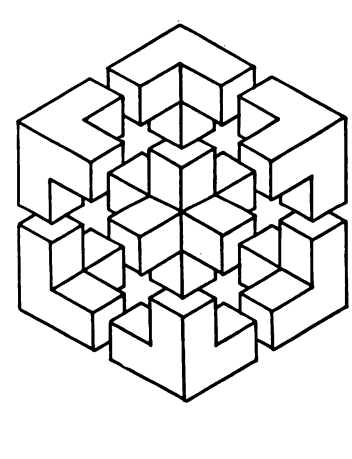
Figura 3. Programació lineal.

Quina relació hi ha entre aquest problema i els políedres convexos? Bé: el conjunt de les solucions admissibles del nostre problema és un políedre convex de dimensió dos. Si la nostra dieta constés de més de dos aliments, el domini de les solucions seria un políedre convex de dimensió superior, per exemple, de dimensió 10 si ens alimentéssim a partir de deu tipus d'aliment diferents. En el nostre problema de dimensió dos hem pogut trobar la solució amb un senzill dibuix. Potser també en el cas de dimensió tres podríem arribar a fer-ho així, però és clar que en el cas de més de tres variables, obtenir la solució per un dibuix és inviable. Malgrat això, s'ha pogut obtenir un *algorisme* que resol el problema en general. G. B. Dantzig és l'autèntic descobridor de l'anomenat *algorisme del símplex*. Tota una multitud de preguntes de l'economia i la tècnica, aparentment no relacionades les unes amb les altres, poden formular-se com a problemes de programació lineal i resoldre's amb l'ajuda del mètode del símplex. L'any 1975, L. V. Kantorovich i T. C. Koopmans van rebre el Premi Nobel d'economia pels seus treballs sobre programació lineal. El treball de Dantzig potser es va considerar com massa purament matemàtic i és ben sabut que no hi ha Premi Nobel de matemàtiques...

L'algorisme del símplex

Com funciona l'algorisme del símplex? Les cares del políedre convex que representa les solucions admissibles vénen donades per un sistema d'equacions lineals. La funció que cal minimitzar ve donada per un pla que cal desplaçar fins que toqui el políedre. Partint d'un vèrtex, l'algorisme busca un altre vèrtex contigu amb cost inferior. A cada vèrtex del políedre, li corresponen algunes de les equacions del sistema original. L'exercici consisteix, doncs, a resoldre successius sistemes d'equacions. La simplicitat de l'algorisme el fa apropiat per a la seva implementació a l'ordinador. Durant força temps, però, va restar oberta la pregunta de fins a quin punt era ràpid i eficient aquest algorisme. S'ha vist que, per a gairebé tots els problemes, és un algorisme molt bo, però V. Klee i G. J. Minty han construït exemples en què l'algorisme del símplex requereix un temps de càlcul molt llarg. Recentment s'ha estat mirant de trobar mètodes millors, com l'algorisme de Karmakar.

Tornem al primer dels nostres camins i convidem el lector a continuar el passeig. Considerem el reticle G_d format pels punts de coordenades enteres de l'espai euclidià de dimensió d.



Anomenarem *políedre reticular* un políedre convex, els vèrtex del qual siguin punts de G_d. Si P és un políedre reticular i λ és un dels nombres $0, 1, 2, 3, \ldots$, λP designarà el políedre que s'obté a partir de P fent una homotècia de centre l'origen de coordenades i raó λ. Designem per $f_P(\lambda)$ el nombre de punts del reticle que són a dintre de λP.

El polinomi de Ehrhart

En l'exemple representat en la figura 4 tenim $f_P(0) = 1$, $f_P(1) = 6$, $f_P(2) = 16$. És clar que $f_P(\lambda)$ creix amb λ, però, com ho fa? Fa més de trenta anys que E. Ehrhart, que aleshores era professor d'ensenyament secundari a Estrasburg, va descobrir que f_P és sempre un polinomi de grau d, de la forma

$$f_P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_d\lambda^d .$$

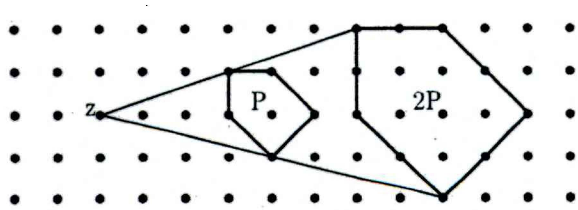
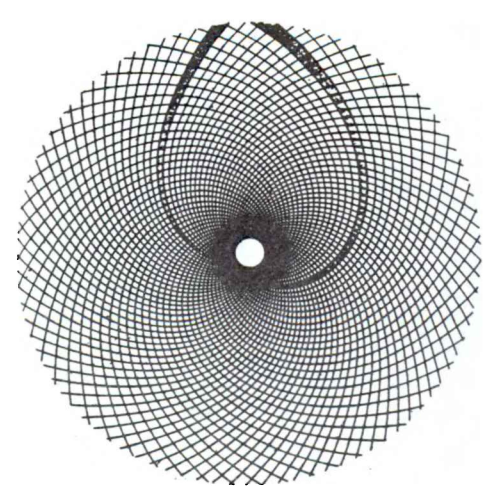


Figura 4. Polinomi d'Ehrhart.

És una fórmula simple, però l'autèntica aventura, el camí cap a l'interior de la matemàtica, va començar quan Ehrhart va interrogar-se sobre com determinar els coeficients $a_0, a_1, \ldots, a_d$. En el cas del nostre exemple veiem fàcilment que $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 2,5$, però, quina és la resposta per al cas $d = 3$, que és el cas de l'espai ordinari? Si λ és molt gran, el nombre de punts a λP s'acosta al volum del políedre λP. A partir d'aquí podem veure que a_3 ha de ser igual al volum de P. a_2 és una mena de superfície lateral de P i si prenem $\lambda = 0$ veiem que $a_0 = 1$. Quant val, però, a_1? Quant val en el cas del tetràedre, que deu ser tan senzill com sigui possible? J. Pommersheim ha trobat recentment la fórmula que podem veure en aquesta mateixa pàgina.

No intentarem pas de descriure totes les components d'aquesta fórmula, perquè això no ens serviria pas per entendre-la a fons. El que sí que direm és que cada políedre reticular de dimensió tres posseeix una misteriosa companya que ha restat invisible durant molt de temps: una *varietat tòrica* de dimensió sis $V(P)$. S'ha pogut veure que, aplicant els mètodes de la topologia a la varietat $V(P)$, pot obtenir-se informació sobre el políedre P, en particular sobre els coeficients $a_0, a_1, \ldots, a_d$ i també sobre la fórmula de J. Pommersheim.

Això és una magnífica recompensa per a nosaltres: la topologia, que fa ben bé dos-cents anys que va començar estudiant els políedres, ens permet avui entendre els políedres des d'un punt de vista totalment nou.



Peter Mani i Beat Jaggi són professors a l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Berna.